1 Limites de fonctions

Dans cette partie, ℓ et ℓ' désignent des réels finis

Limite d'une somme en *a* ($a \in \mathbb{R}$ **ou** $+\infty$ **ou** $-\infty$)

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un produit en *a* ($a \in \mathbb{R}$ **ou** $+\infty$ **ou** $-\infty$)

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x)$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$

Limite d'un quotient en *a* ($a \in \mathbb{R}$ **ou** $+\infty$ **ou** $-\infty$)

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$0^{\pm}$	0	$\pm\infty$	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	FI	0	$\pm\infty$	FI

Formes Indéterminées (FI)

$(-\infty)+(+\infty)$; $0\times(\pm\infty)$; $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\dfrac{0}{0}$

Limite d'une fonction composée

Soient f *et* g deux fonctions, a, b et c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et **si** $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} g\left[f(x)\right] = c$

Théorèmes de comparaison

f et g sont deux fonctions telles que :

$f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in \left]a;+\infty\right[$ $(a \in \mathbb{R})$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell'$, alors $\ell \le \ell'$

Théorème d'encadrement (des gendarmes)

Si pour tout $x \in \left]a;+\infty\right[$ $(a \in \mathbb{R})$:

$f(x) \le g(x) \le h(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$

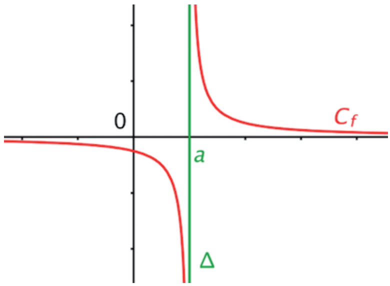
Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$

2 Interprétation graphique des limites de fonctions

Asymptote verticale

La courbe C_f admet la droite Δ d'équation $x = a$ comme **asymptote verticale** si et seulement si :

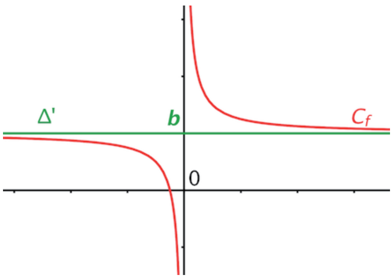
$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad (a \in \mathbb{R})$$



Asymptote horizontale

La courbe C_f admet la droite Δ' d'équation $y = b$ comme **asymptote horizontale** en $+\infty$, et/ou $-\infty$, si et seulement si :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \quad (b \in \mathbb{R})$$



3 Rappel sur les fonctions associées

Somme d'une fonction f et d'un réel k	Sur leur ensemble de définition, les fonctions f et $f+k$ ont le même sens de variation
Somme de deux fonctions croissantes sur un intervalle I	Si les fonctions f et g sont croissantes sur I, alors la fonction $f+g$ est croissante sur I
Somme de deux fonctions décroissantes sur un intervalle I	Si les fonctions f et g sont décroissantes sur I, alors la fonction $f+g$ est décroissante sur I
Produit d'une fonction f par un réel λ	Sur leur ensemble de définition : • si $\lambda > 0$: les fonctions f et λf ont le même sens de variation • si $\lambda < 0$: les fonctions f et λf ont un sens de variation contraire
Racine carrée d'une fonction positive	Si f est une fonction à valeurs positives, alors les fonctions f et $\sqrt{f}$ ont le même sens de variation sur leur ensemble de définition
Inverse d'une fonction non nulle de signe constant sur un intervalle I	Si f est une fonction à valeurs non nulles et de signe constant sur I, alors les fonctions f et $\dfrac{1}{f}$ ont un sens de variation contraire sur I

4 Continuité

Continuité en un réel *a*	La fonction f est continue en un réel a si et seulement si : $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
Continuité sur un intervalle I	La fonction f est continue sur I si et seulement si f est continue en tous points de I La courbe représentative de f se trace alors sans "lever le crayon" sur I
Fonction continue sur un intervalle	• Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ • La fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ • La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ • La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$ • Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$ • La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ • La fonction logarithme népérien est continue sur $]0;+\infty[$ • Toutes fonctions construites par opérations ou par composition à partir des fonctions ci-dessus, sont continues sur leur ensemble de définition, en particulier les fonctions rationnelles
Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)	Si f est une fonction **continue** sur $\mathrm{I} = [a;b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution sur $\mathrm{I} = [a;b]$
Corollaire du TVI	Si f est une fonction **continue et strictement monotone** sur $\mathrm{I} = [a;b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution sur $\mathrm{I} = [a;b]$
Utilisation de la calculatrice (TI) pour résoudre l'équation $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ sur $\mathrm{I} = [a;b]$	• Entrer l'expression de la fonction f dans $\boxed{f(x)} \to \boxed{\text{Y1 =}}$ • Entrer la droite d'équation $y = k$ dans Y2 : $\boxed{\text{Y2 = k}}$ • Régler les paramètres de la fenêtre pour visualiser l'intersection des deux courbes sur l'intervalle I • $\boxed{\text{2nde}} \to \boxed{\text{trace}} \to \boxed{\text{5 : intersect}}$ *First curve* : placer le curseur près du point d'intersection Puis 3 fois sur $\boxed{\text{entrer}}$

5 Dérivabilité et sens de variation

Dérivabilité de la fonction f en a et nombre dérivé en a ($a \in \mathbb{R}$)	f est dérivable en a si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **existe** et est **finie** Le nombre dérivé de f en a est noté $f'(a)$ avec : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Utilisation de la calculatrice (TI) pour calculer $f'(a)$	• Entrer l'expression de la fonction f dans $\boxed{f(x)} \to \boxed{\text{Y1 =}}$ • Régler les paramètres de la fenêtre pour inclure le réel a • Pour calculer $f'(1)$ (par exemple) : $\boxed{\text{2nde}} \to \boxed{\text{trace}} \to \boxed{\text{6 : dy/dx}} \to 1 \to \boxed{\text{entrer}}$
Fonction non dérivable en un réel a	Deux exemples possibles : • $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est infinie (ex : $f(x) = \sqrt{x}$ en 0) • $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \neq \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (ex : $f(x) = \lvert x \rvert$ en 0)
Interprétation graphique du nombre dérivé en a	$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a
Équation de la tangente au point d'abscisse a	$y = f'(a)(x-a) + f(a)$
Tangente horizontale	C_f admet une tangente horizontale d'équation $y = f(a)$ aux points d'abscisse a pour lesquels $f'(a) = 0$
Fonction dérivable sur un intervalle I et fonction dérivée	• f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable en tout réel a de I • Si f est dérivable sur I, alors pour tout $x \in \mathrm{I}$, la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée **dérivée** de la fonction f
Dérivabilité des fonctions de référence	• Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ • La fonction inverse est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ • La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ • La fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$ • Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ • La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ • La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ • Toutes fonctions construites par opérations à partir des fonctions ci-dessus sont dérivables sur leur ensemble de définition

5 Dérivabilité et sens de variation II

Sens de variation et signe de la dérivée	• (f' est positive sur un intervalle) équivaut à (f est croissante sur cet intervalle) • (f' est négative sur un intervalle) équivaut à (f est décroissante sur cet intervalle) • (f' est nulle sur un intervalle) équivaut à (f est constante sur cet intervalle)
Utilisation de la calculatrice (TI) pour vérifier les variations d'une fonction *f* sur un intervalle I	• Entrer l'expression de la fonction f dans $\boxed{f(x)} \to \boxed{\text{Y1 =}}$ • Régler les paramètres de la fenêtre pour y inclure l'intervalle I, ainsi que l'image de cet intervalle par la fonction f • Appuyer sur $\boxed{\text{graphe}}$ et vérifier que l'allure de la courbe qui apparaît est cohérente avec les variations de f trouvées par le calcul
Extremum local en *a*	$f'(a)=0$ et $f'(x)$ change de signe en a
Dérivabilité et continuité sur un intervalle I	Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle La réciproque est fausse (ex : $f(x)=\lvert x\rvert$ en 0)